



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# Wytrzymałość materiałów

## EiP - Wykład Nr 2

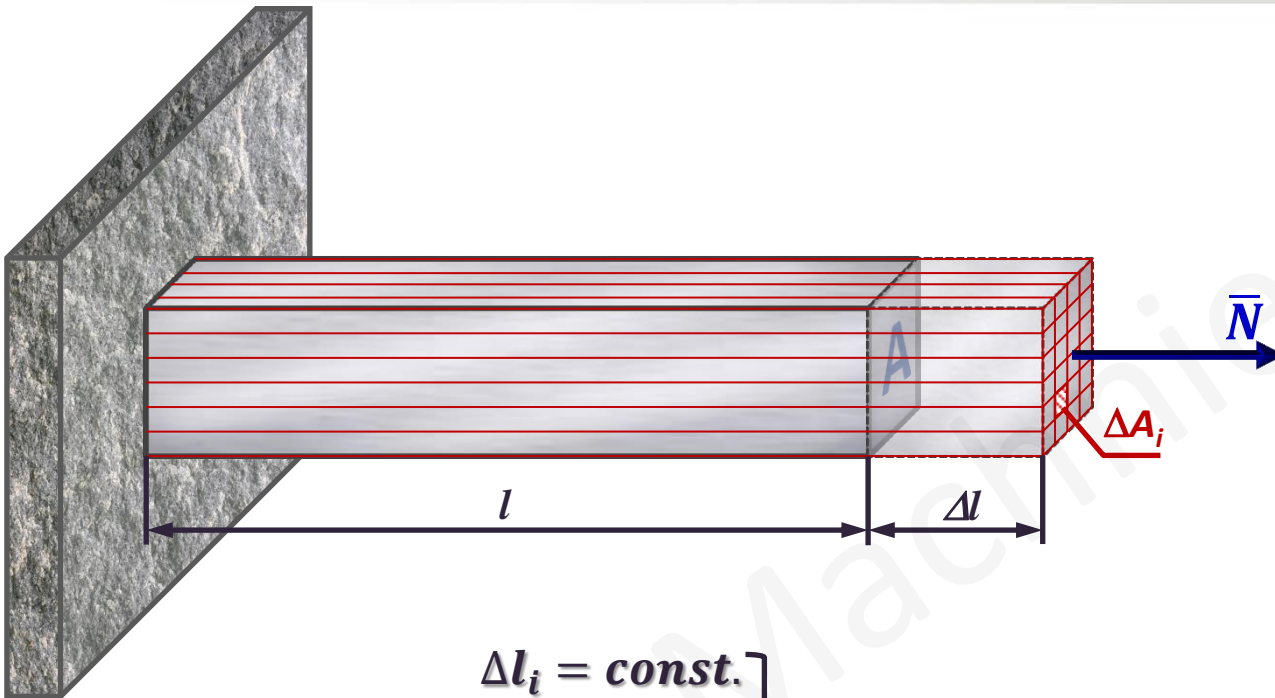
### Osiowe rozciąganie i ściskanie

Naprężenia przy obciążeniach osiowych, zasada de Saint-Venanta, próba statycznego rozciągania i ściskania, monotoniczne własności materiałowe, odkształcenia wzdłużne i poprzeczne, moduł Younga, liczba Poissona, efekt Bauschingera, warunek bezpieczeństwa i warunek sztywności przy rozciąganiu i ścisaniu, efekt koncentracji naprężeń, współczynnik kształtu, rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych.

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki  
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

**Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz**

## 2.1. Rozciąganie/ściskanie - naprężenia



$$\Delta l_i = \text{const.}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a:  $\frac{\Delta l}{l} \sim \sigma$  }  $\sigma_i = \text{const.} = \sigma_r$

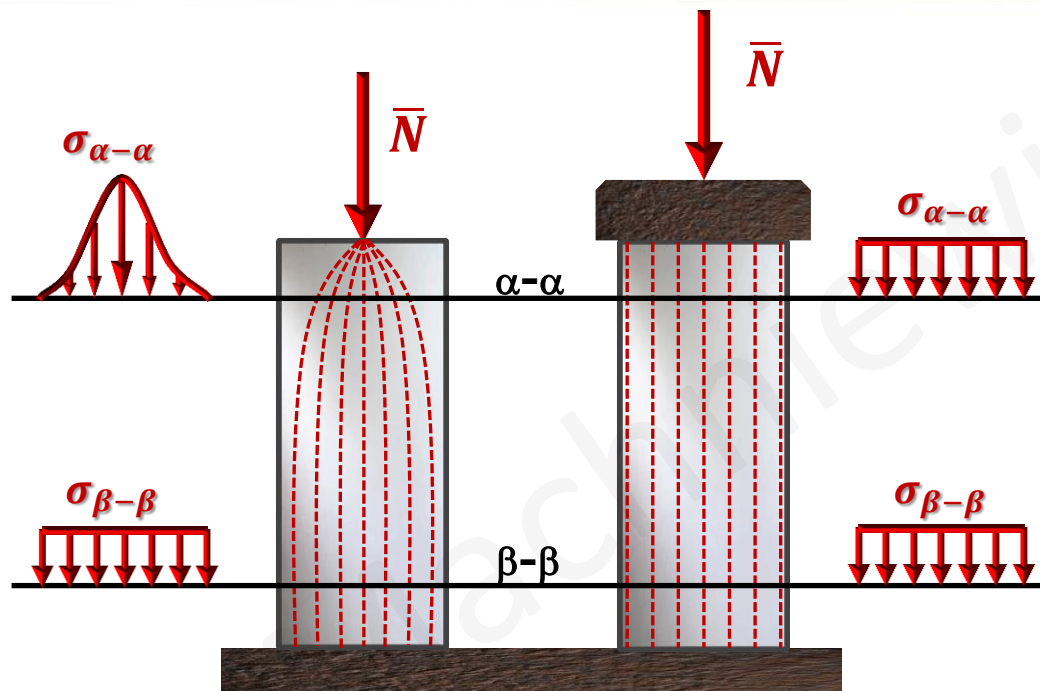
Miedzy  $N$  a  $\sigma_r$  zachodzi zależność:  $N = \int_A \sigma_r dA$

$$N = \sigma_r \int_A dA = \sigma \cdot A$$



$$\sigma_r = \frac{N}{A}$$

## 2.2. Zasada de Saint-Venanta



Jeżeli na pewien obszar ciała sprężystego, pozostającego w równowadze, działają w różny sposób przyłożone lecz statycznie równoważne obciążenia, to w dostatecznej odległości od tego obszaru rozkłady naprężeń są jednakowe, a więc nie zależą od sposobu przyłożenia obciążenia

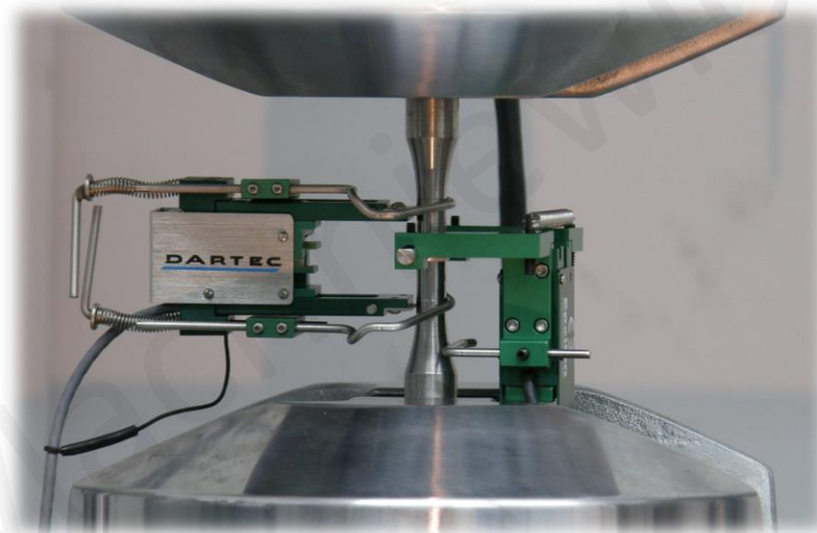
## 2.3. Próba statycznego rozciągania i ściskania

### Aparatura badawcza:

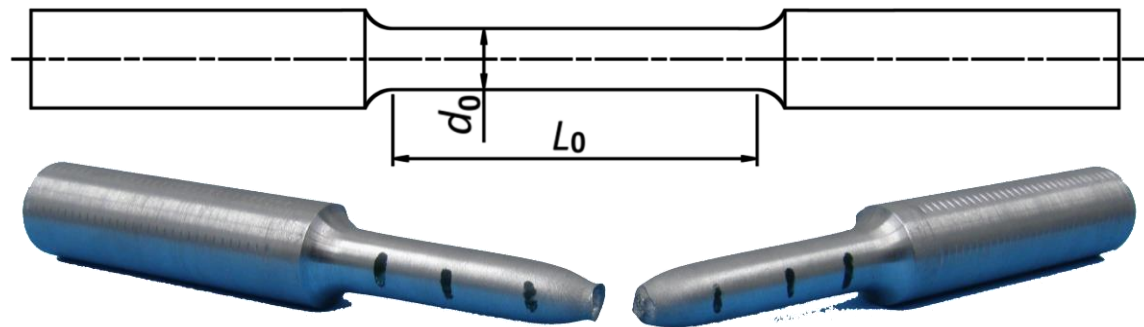
Maszyna wytrzymałościowa:



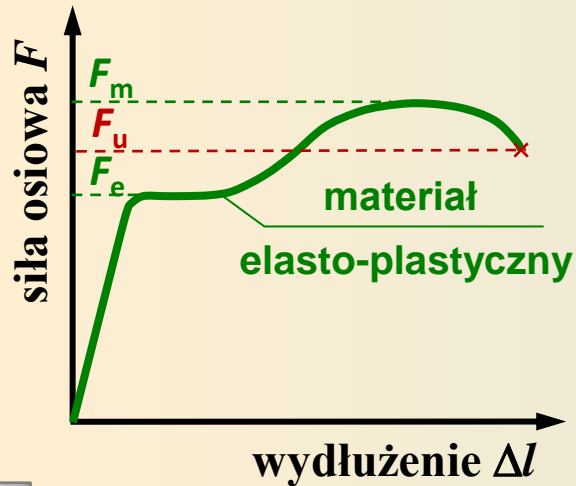
Ekstensometr liniowy i średnicowy:



Geometria próbki:



## 2.4. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania



$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

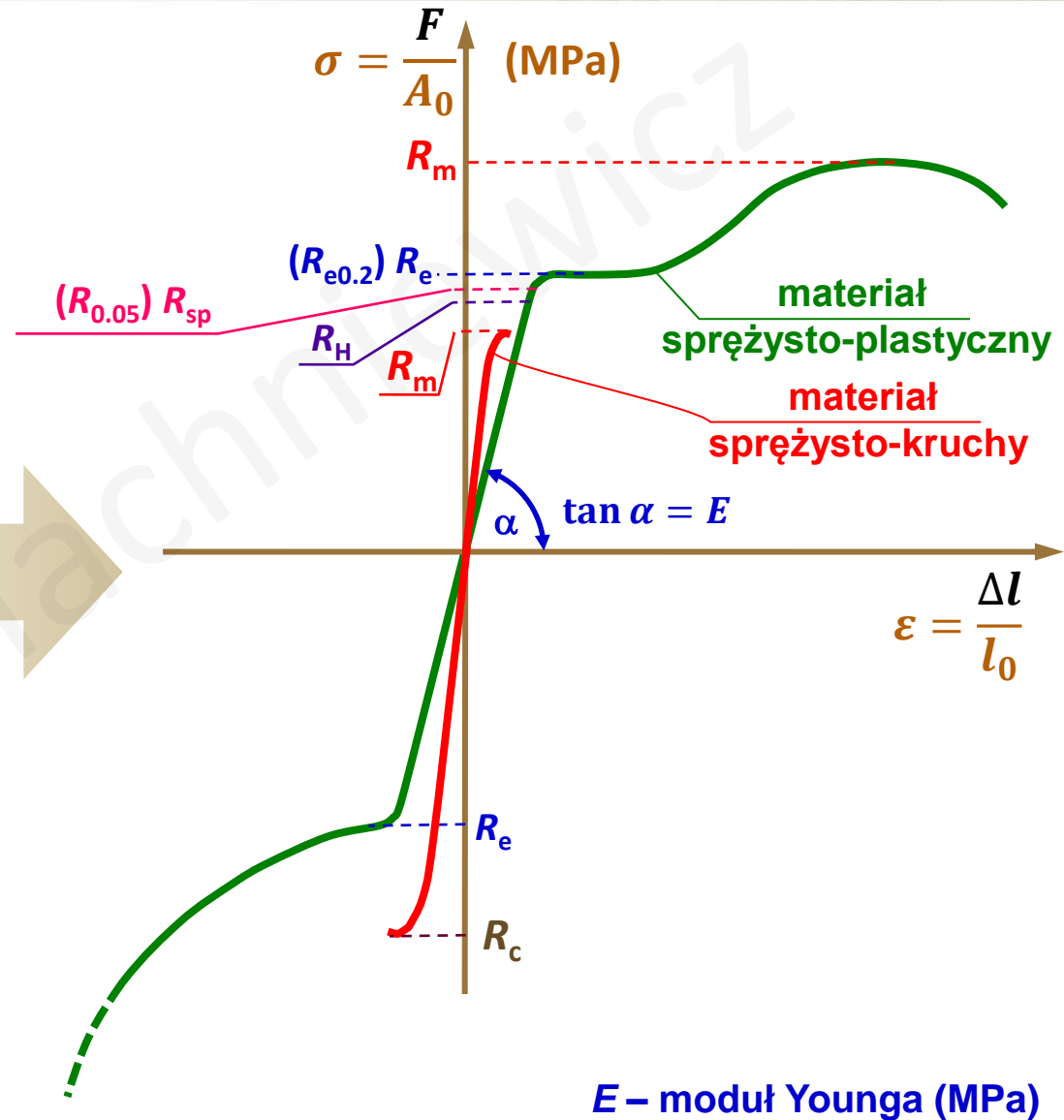
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Naprężenia inżynierskie:

Odształcenia inżynierskie:

$l_0$  – długość początkowa,

$A_0$  – początkowe pole przekroju poprzecznego



## 2.4. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania

### Charakterystyczne granice wytrzymałościowe:

**Granica proporcjonalności ( $R_H$ )** to naprężenie inżynierskie wyznaczające koniec zakresu w obrębie którego zachodzące odkształcenie jest proporcjonalne do wywołującego je naprężenia (granica liniowej sprężystości, granica obowiązywania prawa Hooke'a)

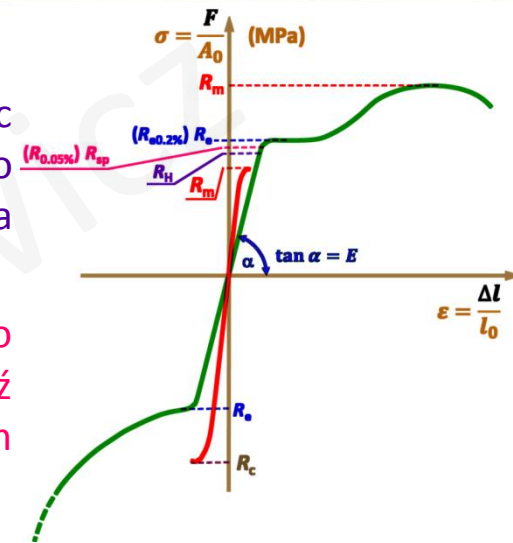
**Granica sprężystości ( $R_{sp}$ )** to naprężenie inżynierskie, po przekroczeniu którego ciało, mimo odciążenia, nie powraca już do pierwotnych kształtów bądź wymiarów. Umowna granica sprężystości odpowiada naprężeniu przy którym odkształcenia trwałe osiągają pewną umowną wartość (np. 0.05% przy  $R_{0.05}$ ).

**Granica plastyczności ( $R_e$ )** to wartość naprężenia inżynierskiego przy którym zaczynają powstawać nieodwracalne odkształcenia plastyczne. Przy tzw. wyraźnej granicy plastyczności następuje wyraźny wzrost odkształceń bez przyrostu, lub nawet przy chwilowym spadku, naprężeń. Umowna granica sprężystości odpowiada naprężeniu przy którym odkształcenia plastyczne osiągają pewną umowną wartość (np. 0.2% przy  $R_{e0.2}$ ).

**Wytrzymałość na rozciąganie ( $R_m$ )** to naprężenie inżynierskie odpowiadające największej sile rozciągającej  $F_m$  uzyskanej w czasie statycznej próby rozciągania.

**Wytrzymałość na ściskanie ( $R_c$ )** to naprężenie inżynierskie odpowiadające największej sile ściskającej  $F_c$  uzyskanej w czasie statycznej próby ściskania.

**Naprężenie zrywające ( $R_u$ )** to rzeczywista wartość naprężenia działającego w miejscu zniszczenia próbki w momencie utraty spójności, odpowiadająca sile przyłożonej do próbki w chwili zniszczenia ( $F_u$ ), odniesionej do rzeczywistego pola przekroju poprzecznego próbki ( $A_u$ ) w miejscu jej rozerwania ( $R_u = F_u / A_u$ ).



## 2.4. Krzywa monotonicznego rozciągania/ściskania

### Charakterystyczne parametry:

**Odształcenia do zniszczenia ( $A$  lub  $\varepsilon_f$ )** – trwałe odształcenie inżynierskie próbki zmierzone po zerwaniu:

$$\varepsilon_f = \frac{l_U - l_0}{l_0};$$

gdzie:  $l_U$  – łączna długość próbki po rozerwaniu,  
 $l_0$  – długość początkowa próbki

**Przewężenie ( $q$ )** – względna zmienna pola przekroju poprzecznego próbki w miejscu jej zerwania:

$$q = \frac{A_0 - A_U}{A_0};$$

gdzie:  $A_U$  – pole przekroju poprzecznego próbki po zerwaniu,  
 $A_0$  – początkowe pole przekroju poprzecznego próbki,

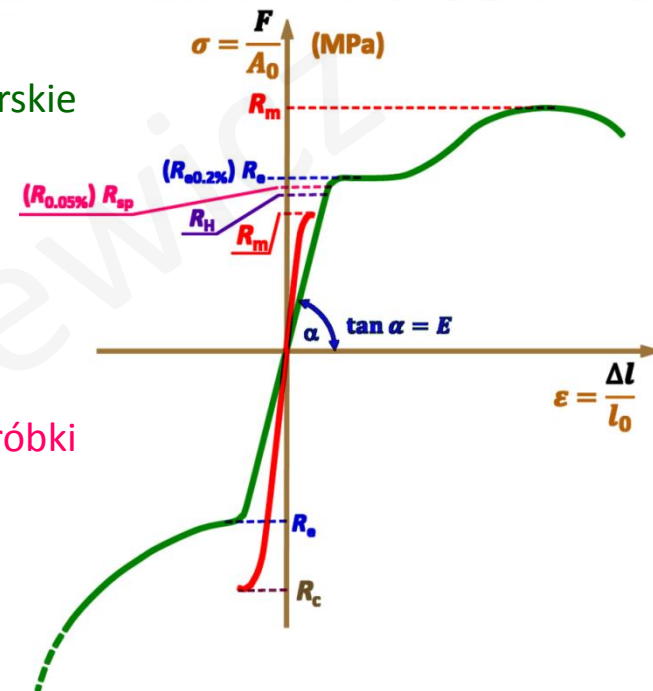
**Moduł Younga ( $E$ )** (moduł sprężystości podłużnej) – stała określająca sprężystość materiału, wyrażająca się zależnością względnego odształcenia liniowego materiału ( $\varepsilon$ ) od działającego wzdłuż tego samego kierunku normalnego naprężenia ( $\sigma$ ), w zakresie odształceń sprężystych. Moduł Younga odpowiada tangensowi kąta nachylenia inżynierskiej krzywej rozciągania  $\sigma - \varepsilon$  do osi odształceń ( $\varepsilon$ ) w zakresie obciążeń poniżej granicy proporcjonalności ( $R_H$ ).

$$E = \sigma / \varepsilon$$



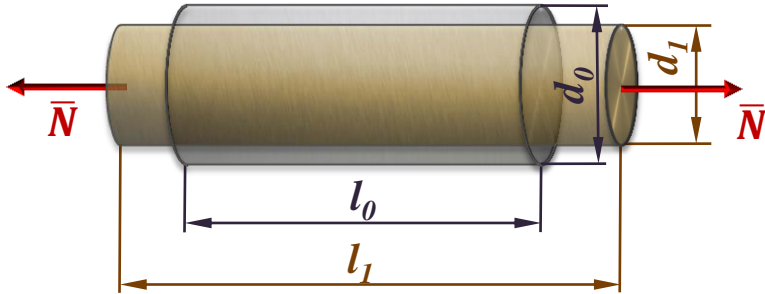
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- prawo Hooke'a



materiał	$E$ , GPa
guma	0.01-0.1
polipropylen	1.5-2
drewno (dębina)	11
beton	~30
szkło	50-90
aluminium	69
miedź	100-115
stal	190-210
diament	1050-1200

## 2.5. Odkształcenia poprzeczne przy obciążeniach osiowych

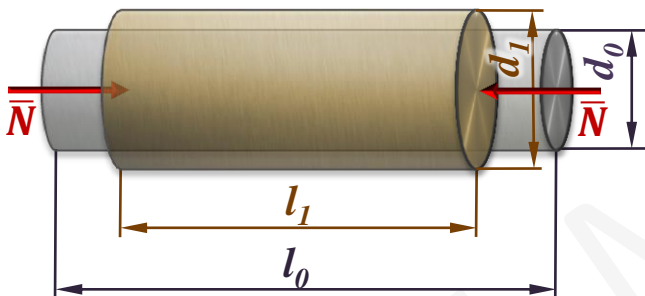


Odkształcenie wzdłużne:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \Delta l = l_1 - l_0$$

Odkształcenie poprzeczne:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \Delta d = d_1 - d_0$$



$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} = -\nu$$

Średnica końcowa:

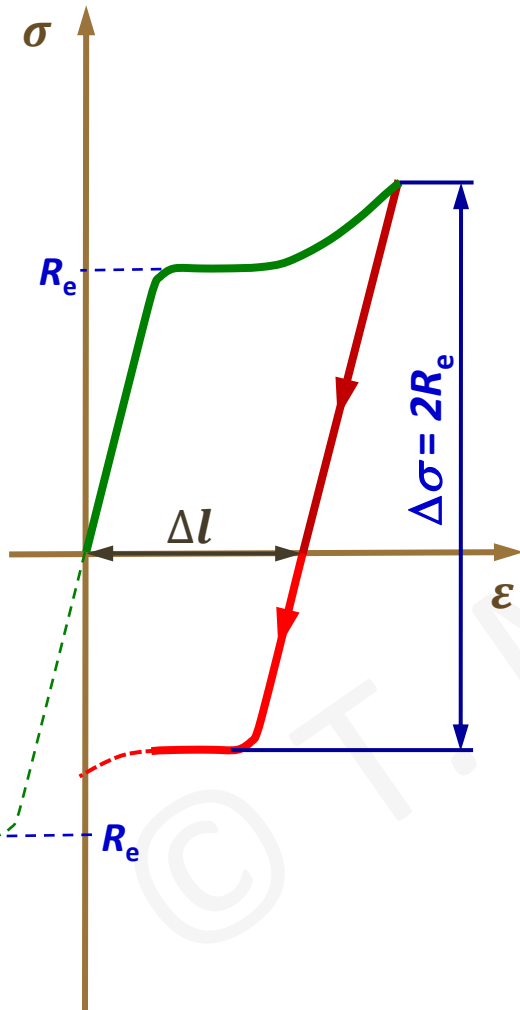
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_p = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} \\ \varepsilon_p = \frac{\Delta d}{d_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta d = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} d_0 \\ \Delta d = d_1 - d_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} d_1 = d_0 - \nu \frac{\Delta l}{l_0} d_0 \\ d_1 = d_0 \left( 1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0} \right) \end{aligned}$$

$\nu$  – liczba Poissona ( $0 \leq \nu \leq 0.5$ )

materiał	$\nu$
korek	0
szkło	0.18-0.3
beton	0.2
żeliwo	0.23-0.27
stal	0.24-0.3
stopy Al	0.26-0.36
miedź	0.33
tytan	0.35
kauczuk	0.5



## 2.6. Reakcja materiału na odciążenie



### Efekt Bauschingera:

Jeżeli przy obciążaniu materiału wykazującego efekt umocnienia przekroczona zostanie granica plastyczności, to przy zmianie kierunku obciążenia (odciążaniu) odwrócone płynięcie materiału nastąpi gdy zmiana naprężenia osiągnie wartość  $\Delta\sigma = 2R_e$ , tj. powyżej poziomu granicy plastyczności przy monotonicznym ścisnaniu.

## 2.7. Rozciąganie/ściskanie – warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_r(\sigma_c) = \frac{N}{A} \leq k_r(k_c)$$

$\sigma_r(\sigma_c)$  - naprężenia rozciągające (ściskające)

$k_r(k_c)$  – dopuszczalne naprężenia w przypadku rozciągania (ściskania)

### Naprężenia dopuszczalne

Zależność ogólna:

$$k = \frac{K}{n}$$

$K$  – naprężenia krytyczne

$n$  – współczynnik bezpieczeństwa

materiały elasto-plastyczne

$$k_r = k_c = \frac{R_e}{n_e}$$

materiały kruche

$$k_r = \frac{R_m}{n_m}$$

$$k_c = \frac{R_c}{n_c}$$

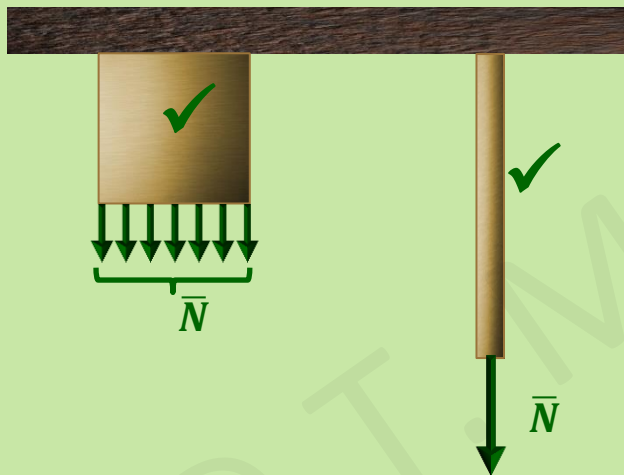
$$R_c > R_m \Rightarrow k_c > k_r$$

$n_e, n_m, n_c$  – współczynniki bezpieczeństwa

## 2.8. Ograniczenie zastosowania warunku bezpieczeństwa

### Rozciąganie

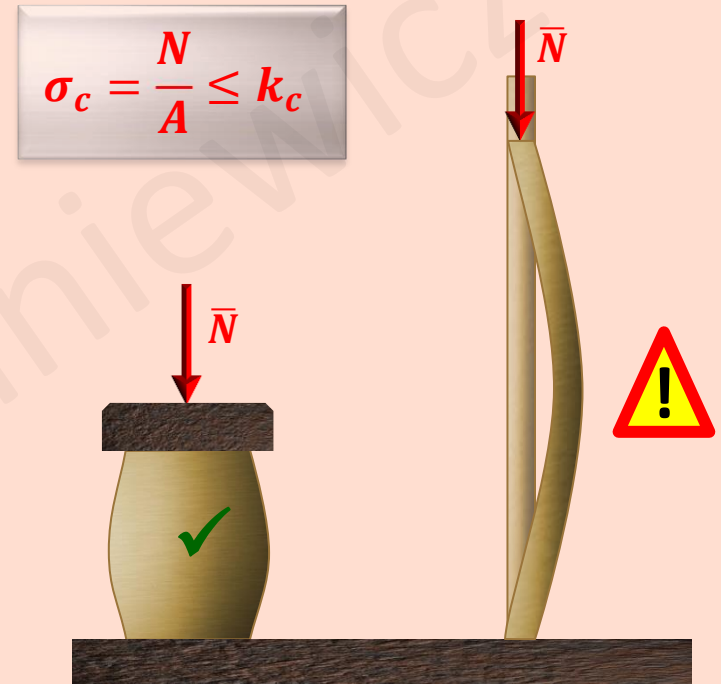
$$\sigma_r = \frac{N}{A} \leq k_r$$



Spełnienie warunku bezpieczeństwa gwarantuje bezpieczną pracę obiektu, bez względu na jego długość.

### Ściskanie

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \leq k_c$$

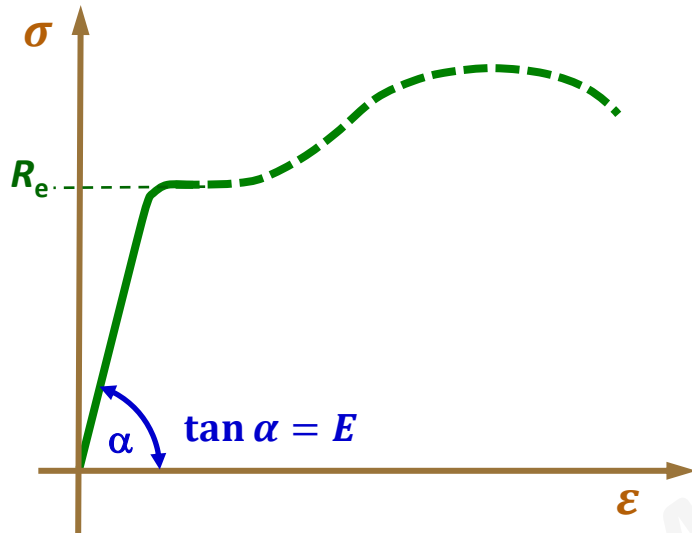


W przypadku elementów o dużej smukłości (znaczną długość w stosunku do wymiaru poprzecznego) nie gwarantuje jego bezpiecznej pracy spełnienie samego warunku bezpieczeństwa na ściskanie.

Z uwagi na zjawisko wyboczenia konieczne jest uwzględnienie warunku stateczności.

## 2.9. Rozciąganie/ściskanie – warunek sztywności

Prawo Hooke'a :



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE}$$

Warunek sztywności:

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE} \leq \Delta l_{dop}$$

$P$  – osiowa siła

$l$  – długość elementu

$A$  – pole przekroju poprzecznego

$E$  – moduł Younga

$\Delta l_{dop}$  – dopuszczalna zmiana długości elementu



**Warunek ekonomiczności** w przypadku konstruowania elementów poddawanych rozciąganiu/ściskaniu polega między innymi na unikaniu nadmiernego przewymiarowywania wymiarów poprzecznych elementów, ponad wartość teoretyczną ( $A_{min}$ ) spełniającą odpowiedni warunek bezpieczeństwa:

$$A_{min} = \frac{N}{k_r} \quad A_{min} = \frac{N}{k_c}$$

Dopuszczalne naprężenia  $k_r$  i  $k_c$  spełniają już wymagane zapasy bezpieczeństwa.

© T. Machniewicz

### Przykład 1.1:

Obliczyć wartości naprężeń w poszczególnych częściach pręta jak na rysunku, całkowitą zmianę jego długości wywołaną działającym obciążeniem, a także końcową średnicę w przekroju 3-3.

Dane:

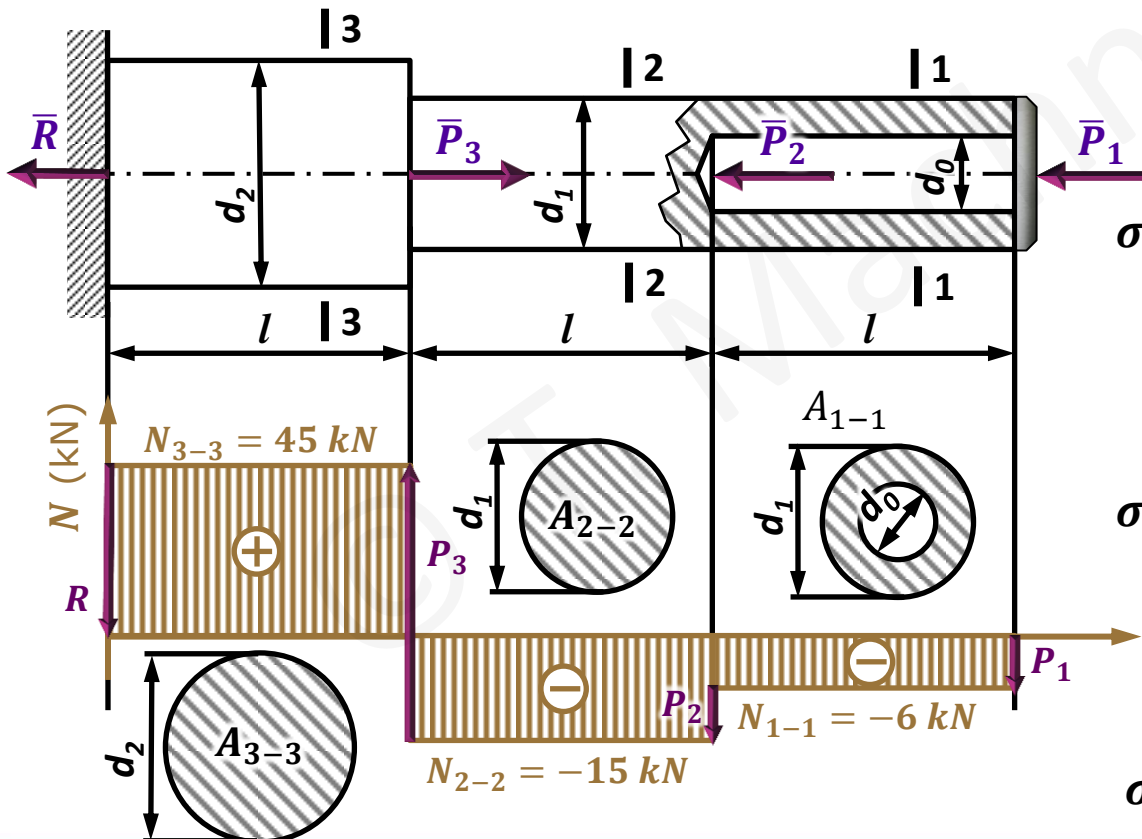
$$P_1=6 \text{ kN}, P_2=9 \text{ kN}, P_3=60 \text{ kN}, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu=0.3$$

$$d_1=20 \text{ mm}, d_0=10 \text{ mm}, d_2=30 \text{ mm}, l=400 \text{ mm}$$

Szukane:

$$\sigma_{1-1}, \sigma_{2-2}, \sigma_{3-3} = ???$$

$$\Delta l_c = ?, d_2' = ?$$



$$\sigma_{1-1} = \frac{N_{1-1}}{A_{1-1}} = \frac{4 \cdot N_{1-1}}{\pi(d_1^2 - d_0^2)}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{4 \cdot (-6000)}{\pi(20^2 - 10^2)} = -25.46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_{2-2}}{A_{2-2}} = \frac{4 \cdot N_{2-2}}{\pi d_1^2}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{4 \cdot (-15000)}{\pi \cdot 20^2} = -47.75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_{3-3}}{A_{3-3}} = \frac{4 \cdot N_{3-3}}{\pi d_2^2}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{4 \cdot 45000}{\pi \cdot 30^2} = 63.66 \text{ MPa}$$

## Przykład 1.1:

Dane:

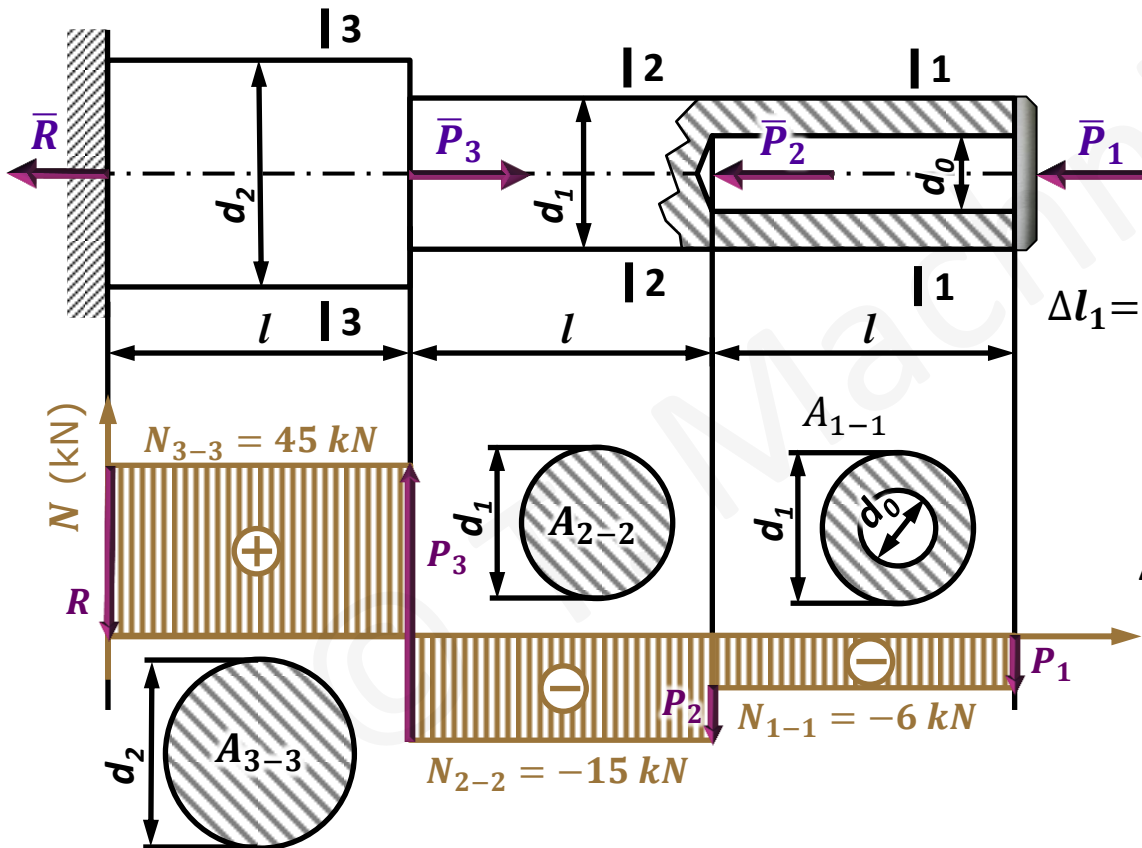
$P_1=6 \text{ kN}$ ,  $P_2=9 \text{ kN}$ ,  $P_3=60 \text{ kN}$ ,  $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$

$d_1=20 \text{ mm}$ ,  $d_0=10 \text{ mm}$ ,  $d_2=30 \text{ mm}$ ,  $l=400 \text{ mm}$

Szukane:

$\sigma_{1-1}$ ,  $\sigma_{2-2}$ ,  $\sigma_{3-3} = ???$

$\Delta l_c = ?$ ,  $d_2' = ?$



$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_{1-1} \cdot l}{A_{1-1} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{1-1} \cdot l}{\pi(d_1^2 - d_0^2) \cdot E}$$

$$\Delta l_1 = \frac{4 \cdot (-6000) \cdot 400}{\pi(20^2 - 10^2) \cdot 2.1 \cdot 10^5} = -0.0485 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{2-2} \cdot l}{A_{2-2} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{2-2} \cdot l}{\pi \cdot d_1^2 \cdot E}$$

$$\Delta l_2 = \frac{4 \cdot (-15000) \cdot 400}{\pi \cdot 20^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5} = -0.0909 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{3-3} \cdot l}{A_{3-3} \cdot E} = \frac{4 \cdot N_{3-3} \cdot l}{\pi \cdot d_2^2 \cdot E}$$

$$\Delta l_3 = \frac{4 \cdot 45000 \cdot 400}{\pi \cdot 30^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5} = 0.1213 \text{ mm}$$

$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.0485 - 0.0909 + 0.1213 = -0.0181 \text{ mm}$$

## Przykład 1.1:

Dane:

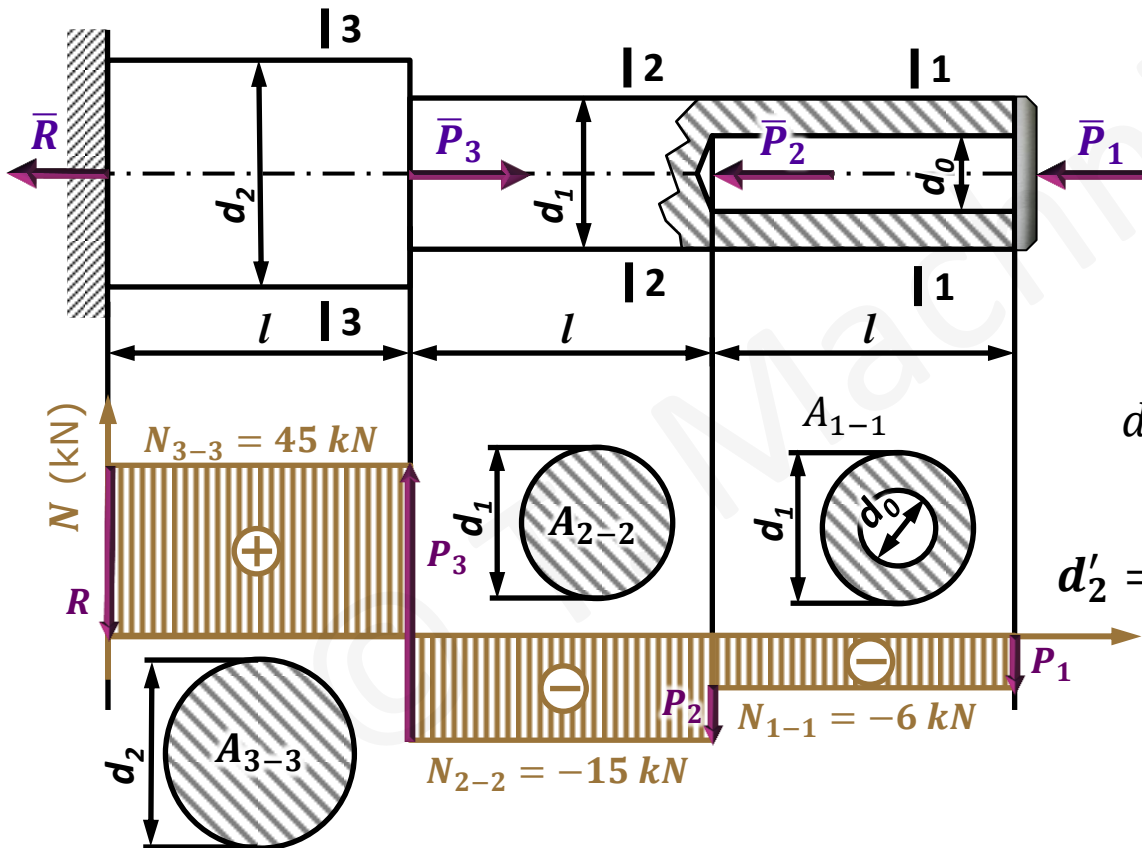
$P_1=6 \text{ kN}$ ,  $P_2=9 \text{ kN}$ ,  $P_3=60 \text{ kN}$ ,  $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$

$d_1=20 \text{ mm}$ ,  $d_0=10 \text{ mm}$ ,  $d_2=30 \text{ mm}$ ,  $l=400 \text{ mm}$

Szukane:

$\sigma_{1-1}$ ,  $\sigma_{2-2}$ ,  $\sigma_{3-3} = ???$

$\Delta l_c = ?$ ,  $d_2' = ?$



$$\frac{\Delta d_2}{d_2} = \varepsilon_p = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\Delta l_3}{l}$$

$$-\nu \frac{\Delta l_3}{l} d_2 = \Delta d_2 = d_2' - d_2$$

$$d_2' = d_2 - \nu \frac{\Delta l_3}{l} d_2 = d_2 \left( 1 - \nu \frac{\Delta l_3}{l} \right)$$

$$d_2' = 30 \left( 1 - 0.3 \frac{0.1213}{l} \right) = 29.997 \text{ mm}$$



## 1.11. Rozciąganie/ściskanie – przykłady obliczeń

### Przykład 1.2:

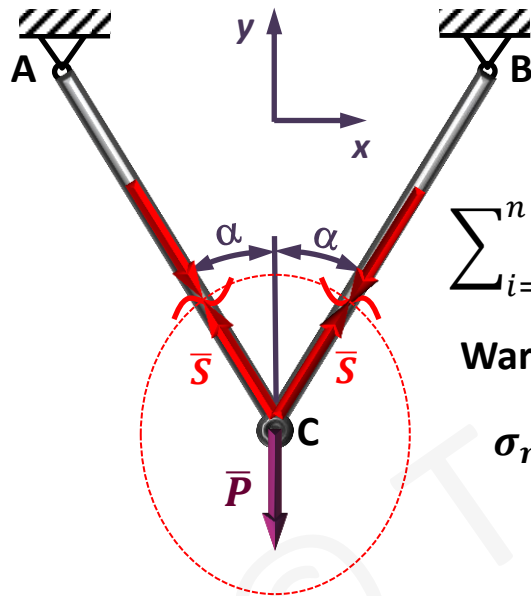
Dobrać średnice prętów konstrukcji jak na rysunku a następnie obliczyć pionowe przemieszczenie punktu C, znając długość początkową prętów  $l$ .

Dane:

$$P=21.6 \text{ kN}, k_r=120 \text{ MPa}, \alpha=30^\circ, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, l=1.2 \text{ m}$$

Szukane:

$$d=?, f_c=?$$



Ze względu na symetrię układu sił (oraz warunek  $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ ):

$$S_1=S_2=S \Rightarrow d_1=d_2=d$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow 2S \cos \alpha - P = 0 \Rightarrow S = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{21.6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 12.47 \text{ kN}$$

Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_r = \frac{N}{A_r} \leq k_r \quad \sigma_r = \frac{4 \cdot S}{\pi \cdot d^2} \leq k_r$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12.47 \cdot 10^3}{\pi \cdot 120}} = 11.51 \text{ mm}$$

Przyjmujemy:  $d=12 \text{ mm}$

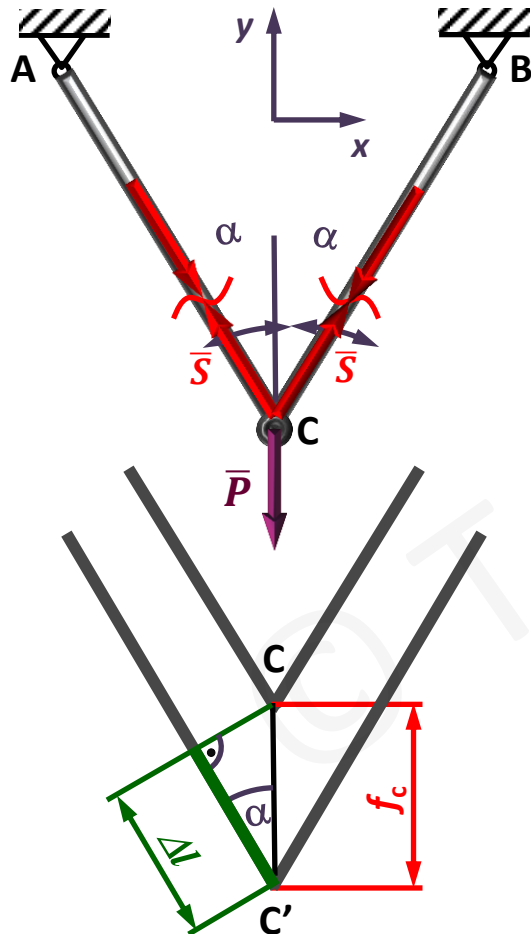
## Przykład 1.2:

Dane:

$P=21.6 \text{ kN}$ ,  $k_r=120 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $l=1.2 \text{ m}$

Szukane:

$d=?$ ,  $f_c=?$



$$S = 12.47 \text{ kN}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

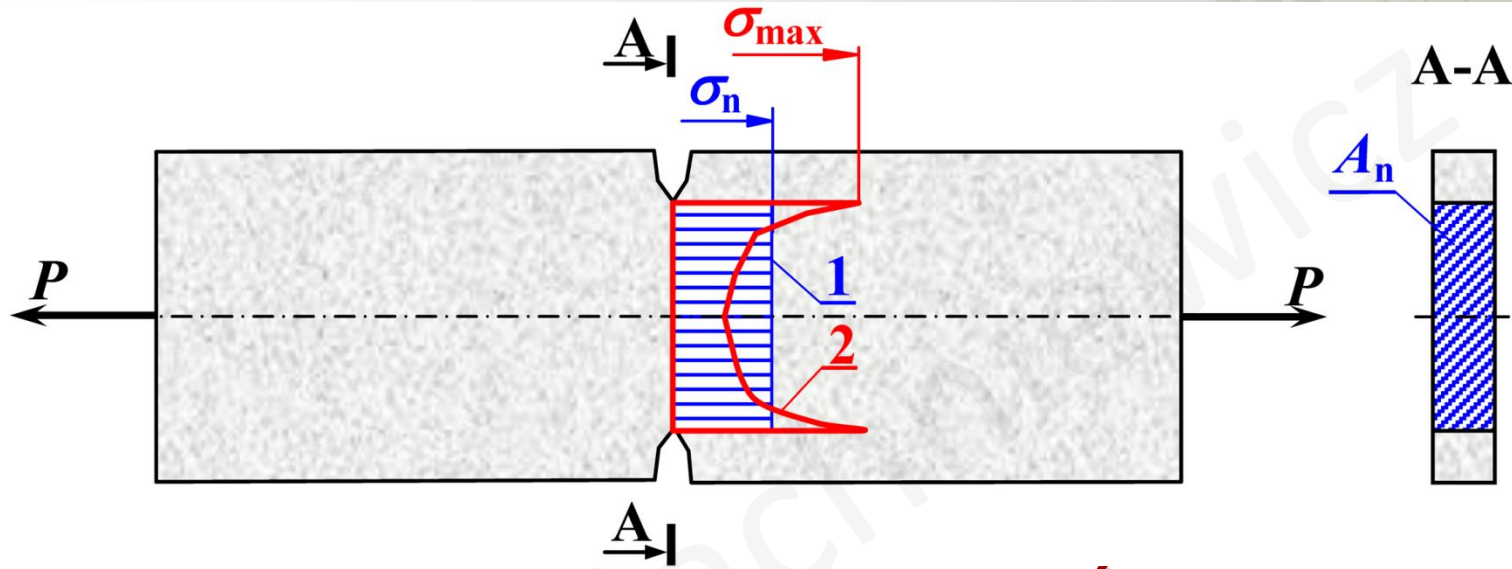
$$f_c = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}$$

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{A \cdot E} = \frac{4 \cdot S \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

$$f_c = \frac{4 \cdot S \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E \cdot \cos \alpha}$$

$$f_c = \frac{4 \cdot 12.47 \cdot 10^3 \cdot 1200}{\pi \cdot 12^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.7275 \text{ mm}$$

## 1.20. Zjawisko spiętrzenia naprężeń



1 – naprężenia nominalne,  $\sigma_n = \frac{P}{A_n}$

2 – rzeczywisty rozkład naprężeń,

**Współczynnik kształtu:**

$$\alpha_k(k_t) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

$$1 < \alpha_k < \infty$$

$\sigma_{max}$  - naprężenie maksymalne, tj. rzeczywiste naprężenie na dnie karbu w materiale idealnie liniowo – sprężystym.

$\sigma_n$  - naprężenie nominalne, tj. naprężenia jakie istniałyby na dnie karbu gdyby zjawisko spiętrzenia naprężeń nie obowiązywało (obliczone na podstawie elementarnych wzorów wytrzymałościowych lub naprężenie w przekroju odległym od karbu).

# 1.20. Zjawisko spiętrzenia naprężeń

**Współczynnik kształtu:**

$$\alpha_k(k_t) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

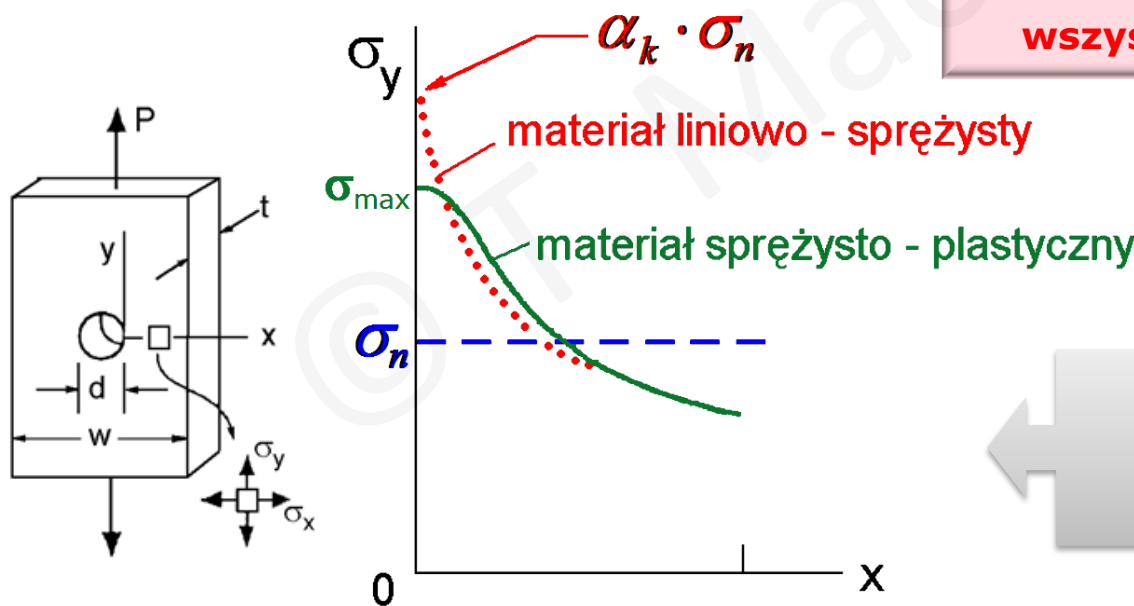
$$1 < \alpha_k < \infty$$

**Współczynnik kształtu zależy od:**

- ✓ geometrii elementu
- ✓ wymiarów karbu
- ✓ sposobu obciążenia

**Uwaga: wsp. kształtu nie zależy od:**

- × materiału elementu,
- × wielkości obciążenia,
- × współczynnika skali (tj. wielkości obiektu przy zachowaniu proporcji wszystkich wymiarów)



**Na skutek uplastycznienia rzeczywista wartość  $\sigma_{max}$  może być mniejsza od  $\alpha_t \cdot \sigma_{max}$**

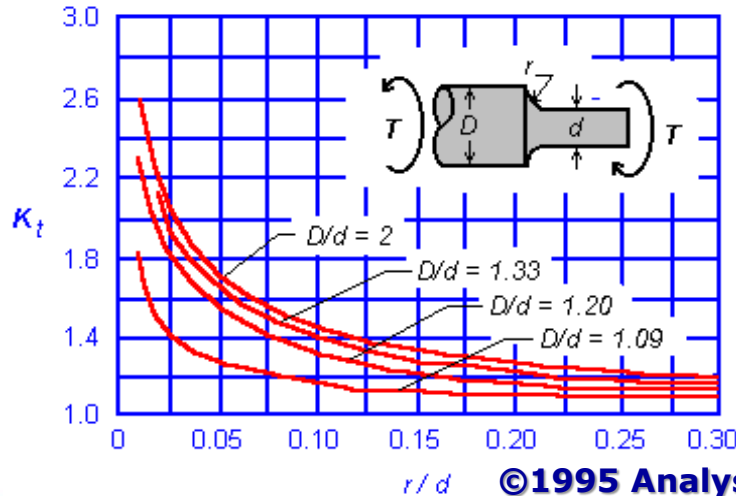
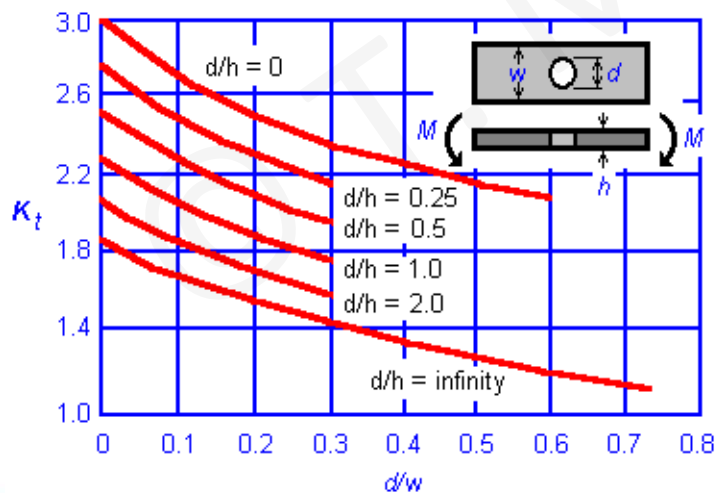
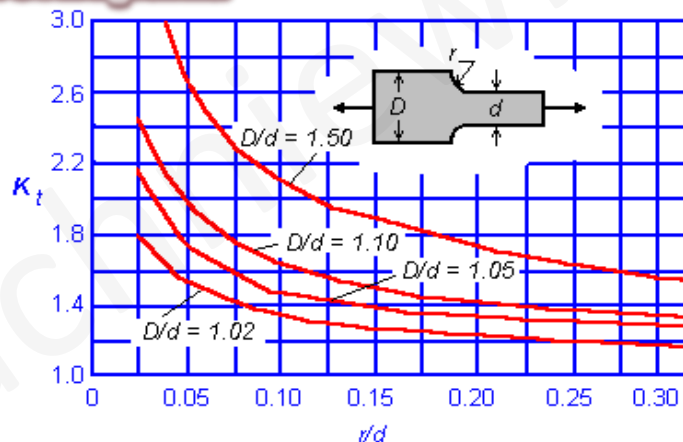
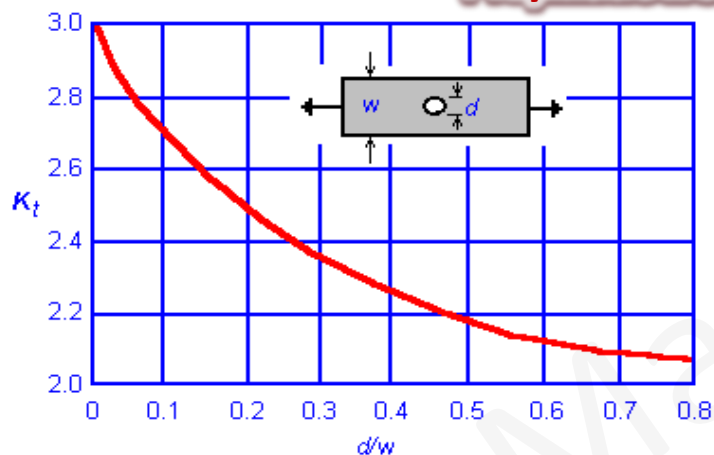
# 1.20. Zjawisko spiętrzenia naprężeń

Współczynnik kształtu:

$$\alpha_k(k_t) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

$$1 < \alpha_k < \infty$$

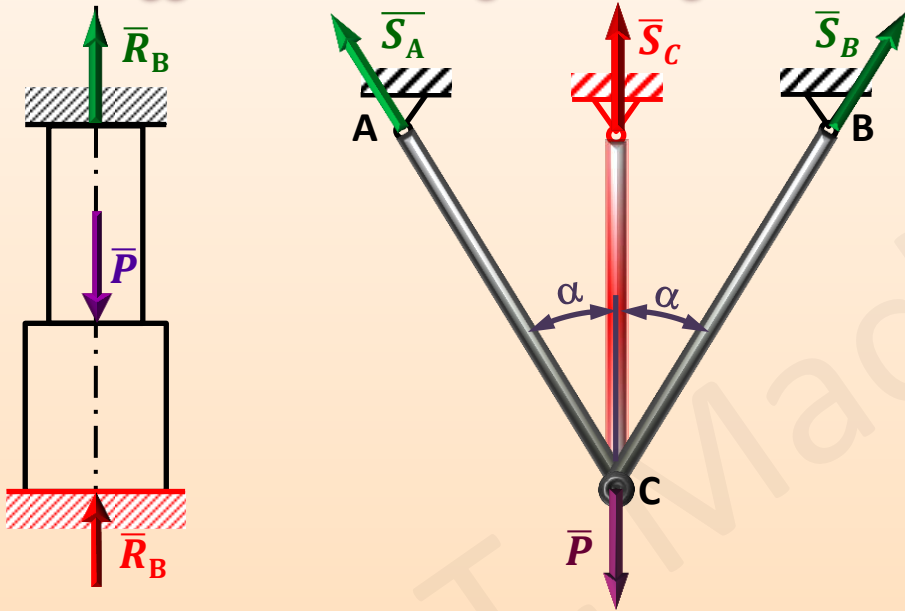
## Przykładowe rozwiązania



# 1.12. Rozciąganie/ściskanie – układy statycznie niewyznaczalne

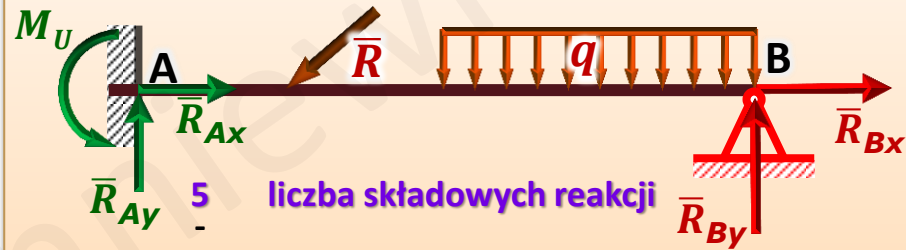
**Statycznie niewyznaczalnymi** nazywamy takie układy obciążeń, w których liczba niewiadomych reakcji jest większa od znanej ze statyki liczby warunków równowagi, np.:

## Układy jednokrotnie statycznie niewyznaczalne

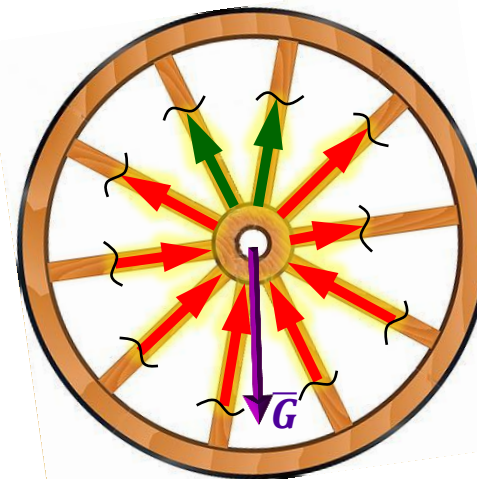


2	liczba składowych reakcji	3
-		-
1	liczba równań statycznej równowagi	2
=		=
1	reakcja nadliczbowa	1

## Układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny

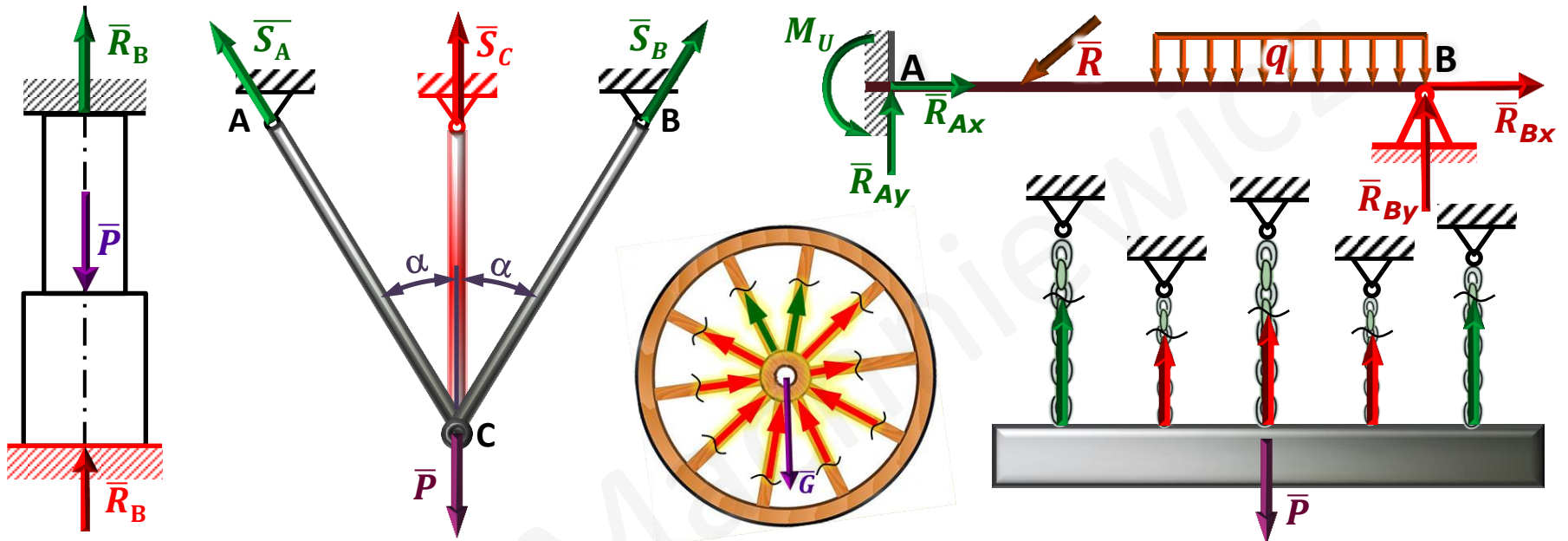


5	liczba składowych reakcji
-	
3	liczba równań statycznej równowagi
=	
2	reakcja nadliczbowa



Układ 8-krotnie statycznie niewyznaczalny

# 1.12. Rozciąganie/ściskanie – układy statycznie niewyznaczalne



**Układy statycznie niewyznaczalne** rozwiązać można uwzględniając odkształcenia elementów tworzących dany obiekt, tj. uzupełniając równania równowagi statycznej odpowiednimi równaniami równowagi odkształceń, tak by łączna liczba równań odpowiadała liczbie nieznanych składowych reakcji.

Odkształcenia (zmiana długości) elementu może być w szczególności wynikiem:

- ❖ działania sił:  $\Delta l = \frac{Pl}{AE}$   $P$  – osiowa siła  $l$  – długość elementu  $E$  – moduł Younga
- ❖ działania temperatury:  $\Delta l = \Delta t \cdot l \cdot \alpha$   $\Delta t = t_1 - t_0$  – przyrost temperatury  $\alpha$  ( $1/^\circ\text{C}$ ), ( $1/K$ ) – współczynnik rozszerzalności termicznej

# 1.13. Układy statycznie niewyznaczalne – przykłady obliczeń

## Przykład 1.3:

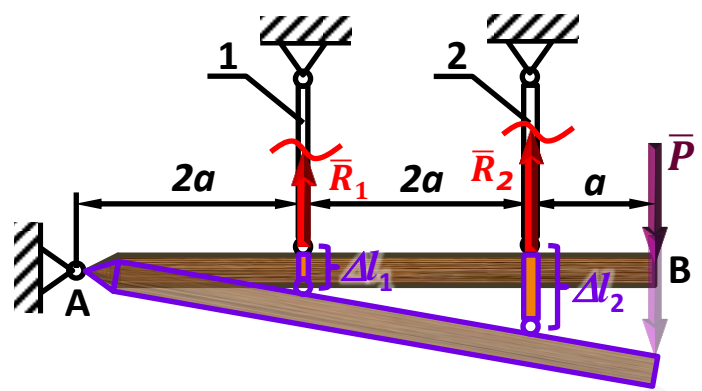
Dobrać średnice prętów ( $d_1$  i  $d_2$ ) konstrukcji jak na rysunku.

Dane:

$$P=21.6 \text{ kN}, k_r=120 \text{ MPa}, E_1=E_2, l_1=l_2, A_2=2A_1$$

Szukane:

$$d_1=?, d_2=?$$



**Równanie równowagi statycznej:**

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow -R_1 2a - R_2 4a + P 5a = 0$$

**Równanie równowagi odkształceń:**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2}{4a} &\Rightarrow \Delta l_2 = 2\Delta l_1 \\ \Delta l = \frac{R}{AE} = \frac{4R}{\pi d^2 E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4R_2}{\pi d_2^2 E} = 2 \frac{4R_1}{\pi d_1^2 E}$$

$$\Rightarrow R_2 = 2R_1 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

uwzględniając:  $A_2 = 2A_1 \Rightarrow \frac{\pi d_2^2}{4} = 2 \frac{\pi d_1^2}{4} \Rightarrow \frac{d_2^2}{d_1^2} = 2$

$$\Rightarrow R_2 = 4R_1$$

$$\left. \begin{aligned} -R_1 2a - R_2 4a + P 5a = 0 \\ \Rightarrow -R_1 2a - 4R_1 4a + P 5a = 0 \Rightarrow 18R_1 = 5P \Rightarrow R_1 = \frac{5}{18} P \\ R_2 = 4R_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_2 = \frac{20}{18} P$$



# 1.13. Układy statycznie niewyznaczalne – przykłady obliczeń

## Przykład 1.3:

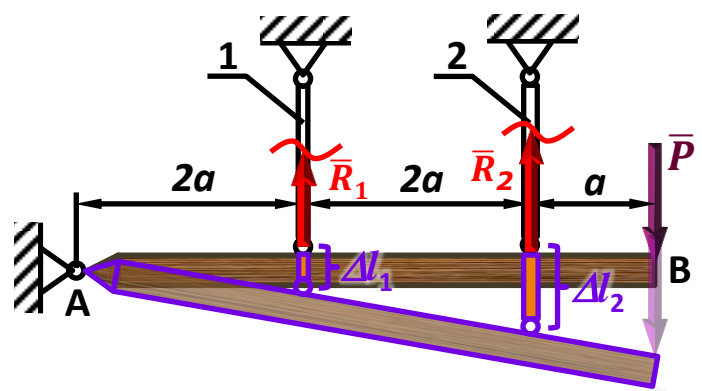
Dobrać średnice prętów ( $d_1$  i  $d_2$ ) konstrukcji jak na rysunku.

Dane:

$$P=21.6 \text{ kN}, k_r=120 \text{ MPa}, E_1=E_2, l_1=l_2, A_2=2A_1$$

Szukane:

$$d_1=?, d_2=?$$



$$R_1 = \frac{5}{18} P \quad R_2 = \frac{20}{18} P$$

1° Warunek bezpieczeństwa dla pręta (1):

$$\sigma_{r1} = \frac{4 \cdot R_1}{\pi \cdot d_1^2} \leq k_r$$

$$\Rightarrow d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot R_1}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{20 \cdot P}{18 \cdot \pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 21600}{18 \cdot \pi \cdot 120}} \approx 7.98 \text{ mm}$$

wówczas:  $d_2^2 = 2d_1^2 \Rightarrow d_2 = d_1\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = 7.97 \cdot \sqrt{2} \approx 11.28 \text{ mm}$

2° Warunek bezpieczeństwa dla pręta (2):

$$\sigma_{r2} = \frac{4 \cdot R_2}{\pi \cdot d_2^2} \leq k_r \Rightarrow d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot R_2}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{80 \cdot P}{18 \cdot \pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 21600}{18 \cdot \pi \cdot 120}} \approx 15.95 \text{ mm}$$

wówczas:  $\Rightarrow d_1 = d_2/\sqrt{2} \Rightarrow d_1 = 15.95/\sqrt{2} \approx 11.28 \text{ mm}$

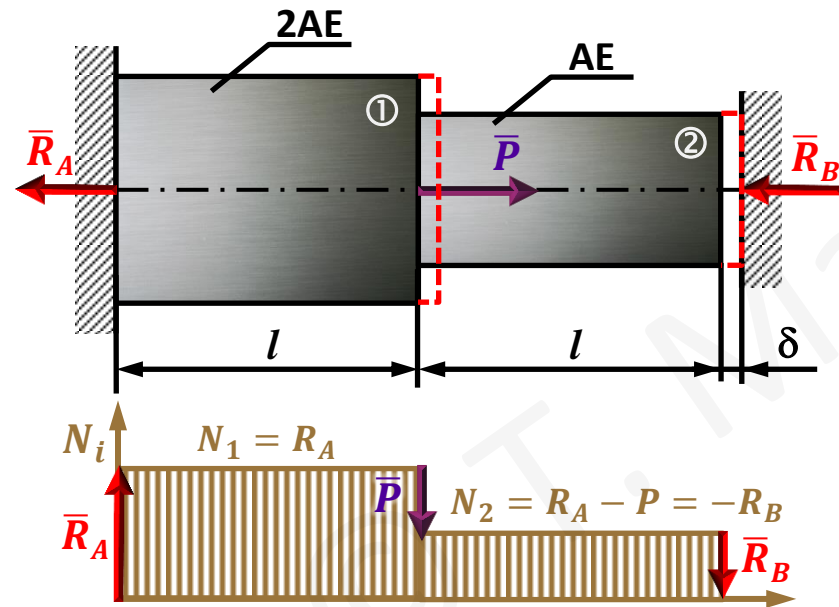
Ostatecznie przyjmujemy:  
 $d_1 = 11.3 \text{ mm} \quad d_2 = 16.0 \text{ mm}$

# 1.13. Układy statycznie niewyznaczalne – przykłady obliczeń

## Przykład 1.4:

Pręt o skokowo zmiennym przekroju został umieszczony między dwoma sztywnymi i nieprzesuwnymi ścianami z luzem  $\delta$ . Obliczyć normalne naprężenia w obu przekrojach pręta ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), jeżeli zostanie on obciążony osiową siłą  $P$  jak na rysunku.

Dane:  $P, A, E, \delta$  Szukane:  $\sigma_1 = ?$ ,  $\sigma_2 = ?$



Równanie równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow -R_A + P - R_B = 0$$

Równanie równowagi odkształceń:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta \\ \Delta l_i = \frac{N_i l}{A_i E_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{N_1 l}{2AE} + \frac{N_2 l}{AE} = \delta \\ N_1 = R_A \\ N_2 = R_A - P \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow \frac{R_A l}{2AE} + \frac{(R_A - P)l}{AE} = \delta \Rightarrow \frac{R_A l}{2AE} + \frac{R_A l}{AE} - \frac{Pl}{AE} = \delta$$

$$\hookrightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{2} R_A = P + \frac{\delta}{l} AE \\ \Rightarrow R_A = \frac{2}{3} \left( P + \frac{\delta}{l} AE \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

uwzględniając:  $-R_A + P - R_B = 0$

$$\hookrightarrow R_B = P - R_A = \frac{1}{3} \left( P - 2 \frac{\delta}{l} AE \right)$$

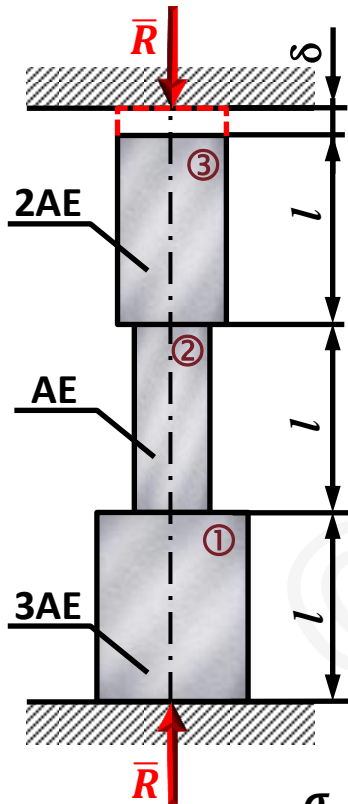
$$\text{stad: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{R_A}{2A} = \frac{1}{3} \left( \frac{P}{A} + \frac{\delta}{l} E \right) \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-R_B}{A} = \frac{1}{3} \left( 2 \frac{\delta}{l} E - \frac{P}{A} \right)$$

# 1.13. Układy statycznie niewyznaczalne – przykłady obliczeń

## Przykład 1.5:

Trójstopniowy pręt jak na rysunku umieszczono pomiędzy nieprzesuwnymi sztywnymi ścianami a następnie podgrzano o  $\Delta t$ . Obliczyć największe normalne naprężenia w pręcie.

Dane:  $l, A, E, \delta, \Delta t, \alpha$  Szukane:  $\sigma_{\max} = ?$



$$\Delta l_C = \delta \quad (1)$$

$$\Delta l_C = \Delta l_T + \Delta l_F \quad (2)$$

$$\Delta l_T = 3l \cdot \alpha \cdot \Delta t \quad (3)$$

$$\Delta l_F = \Delta l_{F1} + \Delta l_{F2} + \Delta l_{F3}$$

$$\Delta l_{F1} = -\frac{Rl}{3AE}$$

$$\Delta l_{F2} = -\frac{Rl}{AE}$$

$$\Delta l_{F3} = -\frac{Rl}{2AE}$$

$$\Delta l_F = -\frac{Rl}{3AE} - \frac{Rl}{AE} - \frac{Rl}{2AE} = -\frac{2Rl}{6AE} - \frac{6Rl}{6AE} - \frac{3Rl}{6AE} \Rightarrow \Delta l_F = -\frac{11Rl}{6AE} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta l_T + \Delta l_F = \delta \quad (3) \quad (4) \Rightarrow 3l \cdot \alpha \cdot \Delta t - \frac{11Rl}{6AE} = \delta$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\textcircled{2}} = -\frac{R}{A}$$

$$\sigma = \frac{6E(3l \cdot \alpha \cdot \Delta t - \delta)}{11l}$$

$$R = \frac{6AE}{11l} (3l \cdot \alpha \cdot \Delta t - \delta)$$

$\Delta l_T$  – wydłużenie wywołane zmianą temperatury  
 $\Delta l_F$  – wydłużenie wywołane działaniem sił